ĐOÀN TRÍ DŨNG – HÀ HỮU HẢI

BẤT ĐẲNG THỨC AM-GM

TƯ DUY DỒN BIẾN

24H HỌC TOÁN - CHIẾN THẮNG 3 CÂU PHÂN LOẠI

Giáo viên: Đoàn Trí Dũng – Hà Hữu Hải

BÀI 6: AM – GM Dồn biến

I. Giới thiệu cơ bản về bất đẳng thức Cauchy (AM – GM):

- Bất đẳng thức Cauchy cho hai số: $\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab}, \forall a,b \geq 0 \\ ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2, \forall a,b \end{cases}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- Bất đẳng thức Cauchy cho ba số: $\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}, \forall a,b,c \geq 0 \\ abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3, \forall a,b,c \geq 0 \end{cases}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$
- Bất đẳng thức Cauchy tổng quát cho n số không âm: $\begin{cases} a_1+a_2+...+a_n \geq n\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}, \forall a_1,a_2,...a_n \geq 0 \\ a_1a_2...a_n \leq \left(\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right)^n, \forall a_1,a_2,...a_n \geq 0 \end{cases}$. Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$

II. Các hệ quả của bất đẳng thức Cauchy (AM – GM):

- $a^2+b^2 \geq 2ab, \forall a,b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- $a^2+b^2 \geq -2ab, \forall a,b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- $ab \leq \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2, \forall a,b \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- $a^3+b^3+c^3 \geq 3abc, \forall a,b,c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.
- $abc \leq \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^3, \forall a,b,c \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.
- $3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2), \forall a,b,c \in \mathbb{R}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c$.
- $a^3+b^3 \geq ab(a+b), \forall a,b \geq 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.
- $\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{a} \geq a+b, \forall a,b > 0$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b$.

IV. Sử dụng bất đẳng thức AM – GM đưa về biến cần tìm:

Bài 1: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=2(x^3+y^3)-3\sqrt{x+y}$.

Bài 2: Cho các số thực x,y dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{8xy(x^2+y^2)}+8\sqrt{x+y}$.

Bài 3: Cho các số thực dương x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{9x^3y^3(x^3+y^3)}-\dfrac{1}{x+y}$

Bài 4: Cho a,b,c thỏa mãn $c>0, a\ge c, b\ge c$. Tìm giá trị lớn nhất của: $P=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}-2a^2b^2$

Bài 5: Cho các số thực $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-2\sqrt{a+b+c}$

Bài 6: Cho a,b,c độ dài 3 cạnh một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}+a^2b^2c^2(abc-1).$$

Bài 7: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=x^4y+y^4z+z^4x-3\sqrt[3]{xy+yz+zx}$$

Bài 8: Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}$

Bài 9: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+(a+b+c)^3.$$

Bài 10: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}-\sqrt{a+b+c}$

Bài 11: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}+\frac{(a+b+c)^3}{54}$$

Bài 12: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}}$

Bài 13: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}-\frac{(a+b+c)^2}{6}$$

ĐÁP ÁN

Bài 1: Cho các số thực x,y thỏa mãn $x+y>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=2(x^3+y^3)-3\sqrt{x+y}$.

Phân tích

- Biến cần đưa về: $x+y$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $x^3+y^3\ge f(x+y)$.

- Biến đổi biểu thức: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, do đó nếu muốn sử dụng đánh giá $x^3+y^3 \xrightarrow{\geq} x+y$, ta sẽ cần $xy \xrightarrow{\leq} x+y$.
- Đánh giá cần tìm: $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$.

Bài giải

Ta có: $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$. Ta có đánh giá: $xy \leq \dfrac{(x+y)^2}{4}$. Do đó:

$$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y) \geq (x+y)^3-\frac{3(x+y)^3}{4} \Leftrightarrow x^3+y^3 \geq \frac{(x+y)^3}{4}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y$. Vậy: $P=2\left(x^3+y^3\right)-3\sqrt{x+y} \geq \dfrac{(x+y)^3}{2}-3\sqrt{x+y}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{2}t^3-3\sqrt{t}, t>0$. Ta có: $P \geq f(x+y)$. Vì: $f'(t)=\dfrac{3t^2}{2}-\dfrac{3}{2\sqrt{t}}=0 \Leftrightarrow t^2\sqrt{t}=1 \Leftrightarrow t=1$.

Do đó ta có bảng biến thiên:

t	0		1		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	$-\dfrac{5}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t) \geq -\dfrac{5}{2}, t \in (0;+\infty)$. Vậy $P \geq f(x+y) \geq -\dfrac{5}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{5}{2}$ tại $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 2: Cho các số thực x, y dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{8xy\left(x^2+y^2\right)}+8\sqrt{x+y}$.

Phân tích

- Biến cần đưa về: $x+y$.
- Chiều đánh giá cần có: $P \geq$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $xy\left(x^2+y^2\right) \leq f(x+y)$.

- Biến đổi biểu thức: Nếu muốn tạo ra $x+y$ từ x^2+y^2 và xy, ta chỉ có biến đổi: $(x+y)^2=(2xy)+(x^2+y^2)$.
- Đánh giá cần tìm: $(2xy)(x^2+y^2)\le\left(\dfrac{2xy+x^2+y^2}{2}\right)^2$.

Bài giải

Ta có: $\dfrac{1}{2}(2xy)(x^2+y^2)\le\dfrac{1}{2}\dfrac{(2xy+x^2+y^2)^2}{4}\Leftrightarrow xy(x^2+y^2)\le\dfrac{(x+y)^4}{8}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y$. Vậy: $P\ge\dfrac{1}{\dfrac{8(x+y)^4}{8}}+8\sqrt{x+y}\Leftrightarrow P\ge\dfrac{1}{(x+y)^4}+8\sqrt{x+y}$.

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{1}{t^4}+8\sqrt{t},t>0$. Ta có: $P\ge f(x+y)$.

Vì: $f'(t)=-\dfrac{4}{t^5}+\dfrac{4}{\sqrt{t}}=0\Leftrightarrow t=1$. Lập bảng biến thiên của hàm số ta được:

t	0	1	$+\infty$
$f(t)$	0	9	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t)\ge 9$, $t\in(0;+\infty)$. Vậy $P\ge f(x+y)\ge 9$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=\dfrac{1}{2}$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là 9 tại $x=y=\dfrac{1}{2}$.

Bài 3: Cho các số thực dương x,y. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{9x^3y^3(x^3+y^3)}-\dfrac{1}{x+y}$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $x+y$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $x^3y^3(x^3+y^3)\le f(x+y)$.
- Biến đổi biểu thức: Ta có: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$. Như vậy muốn đưa về biến $x+y$ .ta xét tích: $x^3y^3(x^2-xy+y^2)$. Cũng như các bài toán ở trên, ta thấy để tạo ra $x+y$ ta cần có hằng đẳng thức như sau: $(x+y)^2=(x^2-xy+y^2)+xy+xy+xy$.

- Đánh giá cần tìm: $(xy)(xy)(xy)\left(x^2-xy+y^2\right)\le\left(\dfrac{xy+xy+xy+\left(x^2-xy+y^2\right)}{4}\right)^4$

Bài giải

Sử dụng bất đẳng thức AM – GM cho bốn số ta có: $x^3y^3\left(x^3+y^3\right)=(xy)(xy)(xy)\left(x^2-xy+y^2\right)(x+y)$

$\Leftrightarrow x^3y^3\left(x^3+y^3\right)\le\left(\dfrac{xy+xy+xy+x^2-xy+y^2}{4}\right)^4(x+y)\Leftrightarrow x^3y^3\left(x^3+y^3\right)\le\dfrac{(x+y)^9}{256}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y$. Vậy: $P\ge\dfrac{256}{9(x+y)^9}-\dfrac{1}{x+y}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{256}{9t^9}-\dfrac{1}{t},t>0$.

Ta có: $P\ge f(x+y)$ Vì: $f'(t)=-\dfrac{256}{t^{10}}+\dfrac{1}{t^2}=0\Leftrightarrow t=2$. Lập bảng biến thiên của hàm số ta được:

t	0		2		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{9}$	$\nearrow$	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t)\ge-\dfrac{4}{9},t\in(0;+\infty)$. Vậy $P\ge f(x+y)\ge-\dfrac{4}{9}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x=y=1$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là $-\dfrac{4}{9}$ tại $x=y=1$.

Bài 4: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $c>0,a\ge c,b\ge c$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}-2a^2b^2$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: ab.
- Chiều đánh giá cần có: $P\le$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le f(ab)$.

- Biến đổi biểu thức: Nhìn thoáng qua, chúng ta có thể đánh giá bài toán dưới dạng bất đẳng thức AM – GM như sau: $\sqrt{c}\sqrt{a-c}+\sqrt{c}\sqrt{b-c}\le\dfrac{c+a-c}{2}+\dfrac{c+b-c}{2}=\dfrac{a+b}{2}$

  Tuy nhiên đánh giá $\dfrac{a+b}{2}\le f(ab)$ là vô cùng khó khăn. Chính vì vậy để có đánh giá $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le f(ab)$, ta có thể tư duy theo một hướng khác là: $\dfrac{\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}}{f(ab)}\le1$. Như

vậy ta cần tạo ra một đánh giá mà sau khi sử dụng bất đẳng thức AM – GM ta sẽ triệt tiêu toàn bộ các biến a,b,c. Do đó ta biến đổi: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\right)$

Mặt khác theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\left(1-\frac{c}{a}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\left(1-\frac{c}{b}\right)\right)=1$$

Vậy đây chính là những đánh giá cần tìm. Do đó ta có:

$$\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$$

Bài giải

Ta có: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}=\sqrt{ab}\left(\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\right)$.

Theo bất đẳng thức AM – GM cho hai số ta có: $\sqrt{\frac{c}{b}\left(1-\frac{c}{a}\right)}+\sqrt{\frac{c}{a}\left(1-\frac{c}{b}\right)}\le\frac{1}{2}\left(\frac{c}{b}+\left(1-\frac{c}{a}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{a}+\left(1-\frac{c}{b}\right)\right)=1$

Vậy: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{c}{b}=\left(1-\frac{c}{a}\right),\frac{c}{a}=\left(1-\frac{c}{b}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$

Vậy: $P\le\sqrt{ab}-2a^2b^2$. Xét hàm số $f(t)=\sqrt{t}-2t^2, t>0$. Ta có: $P\le f(ab)$.

Vì: $f'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}-4t=0\Leftrightarrow t=\frac{1}{4}$. Lập bảng biến thiên của hàm số ta được:

t	0		$\frac{1}{4}$		$+\infty$
$f(t)$			$\frac{3}{8}$		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t)\le\frac{3}{8}, t\in(0;+\infty)$. Vậy $P\le f(ab)\le\frac{3}{8}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab=\frac{1}{4},\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ do đó: $\frac{a+b}{ab}=\frac{1}{c}\Leftrightarrow c=\frac{1}{4(a+b)}\Leftrightarrow a=t,b=\frac{1}{4t},c=\frac{t}{4t^2+1},\forall t\in\mathbb{R}^+$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{8}$ tại $a=t,b=\frac{1}{4t},c=\frac{t}{4t^2+1}$ trong đó t là một số thực dương bất kỳ.

Bài 5: Cho các số thực $a,b,c>0$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}-2\sqrt{a+b+c}$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge f\left(a+b+c\right)$.
- Chú ý rằng: $\frac{ab}{c}$ và $\frac{ca}{b}$ có một đặc điểm là có cùng giá trị a ở tử số và biểu thức còn lại là hai phân số đảo ngược: $\frac{b}{c},\frac{c}{b}$. Do vậy nếu xét trung bình nhân của hai biểu thức trên ta có: $\sqrt{\frac{ab}{c}\frac{ca}{b}}=a$ giống với một biến trong biểu thức $a+b+c$ cần đưa về.
- Đánh giá cần tìm: $\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge 2\sqrt{\frac{ca}{b}\frac{ab}{c}}=2a$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM ta có: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\ge 2\sqrt{\frac{ab}{c}\frac{bc}{a}}=2b,\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge 2\sqrt{\frac{bc}{a}\frac{ca}{b}}=2c,\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\ge 2\sqrt{\frac{ca}{b}\frac{ab}{c}}=2a$

Cộng hai vế của các đánh giá trên ta được:

$$\left(\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\right)+\left(\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\right)+\left(\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\right)\ge 2\left(a+b+c\right)$$

Do đó: $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Vậy: $P\ge\left(a+b+c\right)-2\sqrt{a+b+c}=\left(\sqrt{a+b+c}-1\right)^2-1$. Vì $\left(\sqrt{a+b+c}-1\right)^2-1\ge -1$ do đó: $P\ge -1$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là -1 tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 6: Cho a,b,c độ dài 3 cạnh một tam giác. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1}{\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)}+a^2b^2c^2\left(abc-1\right).$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: abc.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\left(a+b-c\right)\left(b+c-a\right)\left(c+a-b\right)\le f\left(abc\right)$.
    - Chú ý rằng: $\left(a+b-c\right)$ và $\left(b+c-a\right)$ có trung bình cộng: $\frac{\left(a+b-c\right)+\left(b+c-a\right)}{2}=b$

  Như vậy muốn tạo ra được đánh giá cần tìm, ta cần tạo ra các trung bình cộng của các cặp số với nhau. Nhắc đến các bất đẳng thức giữa trung bình cộng và trung bình nhân, ta nhớ đến đánh giá:

$$xy \le \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$$

- Đánh giá cần tìm: $(a+b-c)(b+c-a) \le \left(\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\right)^2 = b^2$.

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho hai số ta có: $\begin{cases} (a+b-c)(b+c-a) \le \left(\frac{(a+b-c)+(b+c-a)}{2}\right)^2 = b^2 \\ (b+c-a)(c+a-b) \le \left(\frac{(b+c-a)+(c+a-b)}{2}\right)^2 = c^2 \\ (c+a-b)(a+b-c) \le \left(\frac{(c+a-b)+(a+b-c)}{2}\right)^2 = a^2 \end{cases}$

Nhân vế với vế ta có: $(a+b-c)^2(b+c-a)^2(c+a-b)^2 \le (abc)^2$.

Vì a,b,c độ dài 3 cạnh một tam giác, Do đó ta có: $a+b-c>0, b+c-a>0, c+a-b>0$

$$\Rightarrow (a+b-c)(b+c-a)(c+a-b) \le abc.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$. Vậy: $P \ge \frac{1}{abc} + a^2b^2c^2(abc-1)$. Xét hàm số $f(t) = \frac{1}{t} + t^3 - t^2, t>0$. Ta có: $P \ge f(abc)$ Vì: $f'(t) = 3t^2 - 2t - \frac{1}{t^2}$

$\Leftrightarrow f'(t) = \frac{(t-1)(3t^3+t^2+t+1)}{t^2} = 0 \Leftrightarrow t=1$. Lập bảng biến thiên của hàm số ta được:

t	0		1		$+\infty$
$f(t)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t) \ge 1$, $t \in (0;+\infty)$. Vậy $P \ge f(abc) \ge 1$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là 1 tại $a=b=c=1$.

Bài 7: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn $xyz=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x^4y + y^4z + z^4x - 3\sqrt[3]{xy+yz+zx}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $xy+yz+zx$.
- Chiều đánh giá cần có: $P \ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $x^4y+y^4z+z^4x \ge f\left(xy+yz+zx\right)$.

Ta tận dụng điều kiện $xyz=1$ bằng cách chứng minh:

$$x^4y+y^4z+z^4x \ge xyz\left(xy+yz+zx\right) \Leftrightarrow x^4y+y^4z+z^4x \ge x^2y^2z+xy^2z^2+x^2yz^2$$

Ta tìm các đại lượng m,n,p sao cho: $m.x^4y+n.y^4z+p.z^4x=\underbrace{x^4y+...+x^4y}_{m}+\underbrace{y^4z+...+y^4z}_{n}+\underbrace{z^4x+...+z^4x}_{p}$

Đồng thời áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho $\left(m+n+p\right)$ số ta được:

$$\underbrace{x^4y+...+x^4y}_{m}+\underbrace{y^4z+...+y^4z}_{n}+\underbrace{z^4x+...+z^4x}_{p} \ge \sqrt[m+n+p]{\left(x^4y\right)^m\left(y^4z\right)^n\left(z^4x\right)^p}$$

Hay: $m.x^4y+n.y^4z+p.z^4x \ge \left(m+n+p\right)\sqrt[m+n+p]{\left(x^4y\right)^m\left(y^4z\right)^n\left(z^4x\right)^p}$

$\Leftrightarrow m.x^4y+n.y^4z+p.z^4x \ge \left(m+n+p\right)\sqrt[m+n+p]{x^{4m+p}y^{4n+m}z^{4p+n}}$

$\Leftrightarrow m.x^4y+n.y^4z+p.z^4x \ge \left(m+n+p\right)x^{\frac{4m+p}{m+n+p}}y^{\frac{4n+m}{m+n+p}}z^{\frac{4p+n}{m+n+p}}$

Và tìm các hệ số m,n,p sao cho: $\Leftrightarrow m.x^4y+n.y^4z+p.z^4x \ge \left(m+n+p\right)x^2y^2z^1$

Hay: $\begin{cases}\dfrac{4m+p}{m+n+p}=2\\ \dfrac{4n+m}{m+n+p}=2\\ \dfrac{4p+n}{m+n+p}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2m-2n-p=0\\ 2n-2p-m=0\\ 3p=m\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=3p\\ 5p=2n\end{cases}$. Do đó chọn $m=6,n=5,p=2$.

Khi đó: $6x^4y+5y^4z+2z^4x \ge 13x^2y^2z$. Đồng thời tương tự ta sẽ có: $\begin{cases}6y^4z+5z^4x+2x^4y \ge 13y^2z^2x\\ 6z^4x+5x^4y+2y^4z \ge 13z^2x^2y\end{cases}$

Bài giải

Áp dụng bất đẳng thức AM – GM cho 13 số ta được: $\begin{cases}6x^4y+5y^4z+2z^4x \ge 13x^2y^2z\\ 6y^4z+5z^4x+2x^4y \ge 13y^2z^2x\\ 6z^4x+5x^4y+2y^4z \ge 13z^2x^2y\end{cases}$

Cộng vế với vế ta được: $13\left(x^4y+y^4z+z^4x\right) \ge 13xyz\left(xy+yz+zx\right)$.

Vì $xyz=1$ do đó ta có đánh giá: $x^4y+y^4z+z^4x \ge xy+yz+zx$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=1$. Do đó: $P \ge xy+yz+zx-3\sqrt[3]{xy+yz+zx}$.

Đặt $f(t)=t-3\sqrt[3]{t}$. Ta có: $P\geq f(xy+yz+zx)$. Theo bất đẳng thức AM – GM ta có:

$$xy+yz+zx\geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2}\Rightarrow xy+yz+zx\geq 3$$

Vậy xét hàm số $f(t)=t-3\sqrt[3]{t}$ với $t\geq 3$ ta có: $f'(t)=1-\frac{1}{\sqrt[3]{t^2}}=\frac{\sqrt[3]{t^2}-1}{\sqrt[3]{t^2}}$.

Vì $t\geq 3\Rightarrow \sqrt[3]{t^2}-1\geq \sqrt[3]{9}-1>0$ vậy $f'(t)>0,\forall t\geq 3$. Vậy $f(t)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $t\geq 3$. Vậy $f(t)\geq f(3)=3-3\sqrt[3]{3}$. Do đó: $P\geq f(xy+yz+zx)\geq f(3)=3-3\sqrt[3]{3}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $x=y=z=1$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là $3-3\sqrt[3]{3}$ tại $x=y=z=1$.

Bài 8: Cho các số thực a,b,c dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}-4\sqrt[4]{a+b+c}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\geq$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq f(a+b+c)$.
- Chú ý rằng: $\frac{a^2+bc}{b+c}+a=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}$, do đó ta có thể biến đổi tương tự:
$$\frac{b^2+ca}{c+a}+b=\frac{(b+c)(b+a)}{c+a},\frac{c^2+ab}{a+b}+c=\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}.$$
- Tới đây ta chú ý rằng trong bài toán số 5, ta đã chứng minh:
$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq a+b+c$$
Do đó nếu áp dụng đánh giá này, ta sẽ có:
$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\geq 2(a+b+c)$$
Do vậy, ta hoàn toàn có thể tạo ra được đánh giá cần tìm.

Bài giải

Ta có: $\frac{a^2+bc}{b+c}+a=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c},\frac{b^2+ca}{c+a}+b=\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}$

Và tương tự như vậy ta cũng có $\frac{c^2+ab}{a+b}+c=\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}$.

Vậy: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}=\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}-a-b-c$

Vì ta có đánh giá: $\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{zx}{y}\ge x+y+z$, $\forall x,y,z>0$. Do đó:

$$\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge (a+b)+(b+c)+(c+a)$$

Hay: $\frac{(a+b)(a+c)}{b+c}+\frac{(b+c)(b+a)}{c+a}+\frac{(c+a)(c+b)}{a+b}\ge 2(a+b+c)$. Vậy: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\ge a+b+c$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c$.

Do đó: $P\ge a+b+c-4\sqrt[4]{a+b+c}$. Đặt $f(t)=t-4\sqrt[4]{t}\Rightarrow P\ge f(a+b+c)$.

Xét hàm số $f(t)=t-4\sqrt[4]{t}$ với $t\in(0;+\infty)$ ta có: $f'(t)=1-\frac{1}{\sqrt[4]{t^3}}=0\Leftrightarrow t=1$.

Lập bảng biến thiên của hàm số ta được:

t	0		1		$+\infty$
$f(t)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f(t)\ge -3$, $t\in(0;+\infty)$. Vậy $P\ge f(a+b+c)\ge -3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=\frac{1}{3}$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là -3 tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 9: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c\ge 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}+(a+b+c)^3.$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge f(a+b+c)$.

Chú ý rằng để có đánh giá $\frac{a}{1+b^2}\ge$, ta cần $1+b^2\le$, tuy nhiên điều này rất khó để có thể thực hiện. Vì vậy nếu ta cần thiết phải đi theo hướng $1+b^2$, ta cần làm đảo chiều của đánh giá nghĩa là $\frac{1}{1+b^2}$ phải thành $-\frac{1}{1+b^2}$. Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a+ab^2-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}$. Vì $1+b^2\ge 2b\Rightarrow\frac{ab^2}{1+b^2}\le\frac{ab}{2}$.

Khi đó: $\frac{a}{1+b^2}\ge a-\frac{ab}{2}$, tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2},\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$.

Người ta gọi cách đánh giá trên là **Kỹ thuật Cauchy ngược dấu**.

Khi đó cộng vế với vế ta có: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{bc+ca+ab}{2}$.

Cuối cùng ta cần đánh giá theo chiều: $-\frac{bc+ca+ab}{2}\xrightarrow{\ge}a+b+c \Leftrightarrow bc+ca+ab\xrightarrow{\le}a+b+c$

Và ta được bất đẳng thức Hệ quả của bất đẳng thức Cauchy (AM – GM): $3\left(ab+bc+ca\right)\le\left(a+b+c\right)^2$

Bài giải

Ta có: $\frac{a}{1+b^2}=\frac{a+ab^2-ab^2}{1+b^2}=a-\frac{ab^2}{1+b^2}$. Vì $1+b^2\ge 2b\Rightarrow\frac{ab^2}{1+b^2}\le\frac{ab}{2}$.

Khi đó: $\frac{a}{1+b^2}\ge a-\frac{ab}{2}$, tương tự ta có: $\frac{b}{1+c^2}\ge b-\frac{bc}{2},\frac{c}{1+a^2}\ge c-\frac{ca}{2}$.

Khi đó cộng vế với vế ta có: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{bc+ca+ab}{2}$.

Từ Hệ quả của bất đẳng thức AM – GM (Đã chứng minh ở phần II), ta có:

$$3\left(ab+bc+ca\right)\le\left(a+b+c\right)^2$$

Do đó: $\frac{a}{1+b^2}+\frac{b}{1+c^2}+\frac{c}{1+a^2}\ge a+b+c-\frac{bc+ca+ab}{2}\ge a+b+c-\frac{\left(a+b+c\right)^2}{6}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$. Vậy $P\ge a+b+c-\frac{\left(a+b+c\right)^2}{6}+\left(a+b+c\right)^3$.

Xét hàm số $f\left(t\right)=t^3-\frac{t^2}{6}+t$ với $t\ge 3$, ta có $P\ge f\left(a+b+c\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=3t^2-\frac{t}{3}+1=\frac{t\left(9t-1\right)}{3}+1>0,\forall t\ge 3$. Vậy $f\left(t\right)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $t\ge 3$. Do đó $f\left(t\right)\ge f\left(3\right)=\frac{57}{2}$.

Do đó: $P\ge f\left(a+b+c\right)\ge f\left(3\right)=\frac{57}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{57}{2}$ tại $a=b=c=1$.

Bài 10: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2}-\sqrt{a+b+c}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P \geq$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq f(a+b+c)$.
- Biến đổi cần tìm (Sử dụng Kỹ thuật Cauchy ngược dấu):

$$\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$$

Bài giải

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu: $\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2}$.

Vì $a^2+b^2 \geq 2ab$ do đó: $\frac{a^3}{a^2+b^2}=\frac{a^3+ab^2-ab^2}{a^2+b^2}=a-\frac{ab^2}{a^2+b^2} \geq a-\frac{ab^2}{2ab}=a-\frac{b}{2}$.

Tương tự như vậy ta có: $\frac{b^3}{b^2+c^2} \geq b-\frac{c}{2}, \frac{c^3}{c^2+a^2} \geq c-\frac{a}{2}$.

Do đó: $\frac{a^3}{a^2+b^2}+\frac{b^3}{b^2+c^2}+\frac{c^3}{c^2+a^2} \geq \frac{a+b+c}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c$.

Vậy $P \geq \frac{a+b+c}{2}-\sqrt{a+b+c}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a+b+c}-1\right)^2-\frac{1}{2} \geq -\frac{1}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi: $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $-\frac{1}{2}$ tại $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Bài 11: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn điều kiện $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1}+\frac{(a+b+c)^3}{54}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P \geq$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\frac{a+1}{b^2+1}+\frac{b+1}{c^2+1}+\frac{c+1}{a^2+1} \geq f(a+b+c)$.
- Biến đổi cần tìm (Sử dụng Kỹ thuật Cauchy ngược dấu):

$$\frac{a+1}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1} \geq a+1-\frac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\frac{ab+b}{2}$$

Bài giải

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu ta có: $\frac{a+1}{b^2+1}=\frac{(a+ab^2)+(1+b^2)-ab^2-b^2}{b^2+1}=a+1-\frac{b^2(a+1)}{b^2+1}$

Chú ý rằng: $b^2+1\ge 2b$, do đó: $\dfrac{a+1}{b^2+1}=a+1-\dfrac{b^2(a+1)}{b^2+1}\ge a+1-\dfrac{b^2(a+1)}{2b}=a+1-\dfrac{ab+b}{2}$

Tương tự ta có: $\dfrac{b+1}{c^2+1}\ge b+1-\dfrac{bc+c}{2},\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge c+1-\dfrac{ca+a}{2}$.

Khi đó: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge \dfrac{a+b+c}{2}+3-\dfrac{ab+bc+ca}{2}$.

Từ Hệ quả của bất đẳng thức AM – GM (Đã chứng minh ở phần I), ta có: $3(ab+bc+ca)\le (a+b+c)^2$

Do đó: $\dfrac{a+1}{b^2+1}+\dfrac{b+1}{c^2+1}+\dfrac{c+1}{a^2+1}\ge \dfrac{a+b+c}{2}+3-\dfrac{(a+b+c)^2}{6}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy: $P\ge \dfrac{a+b+c}{2}+3-\dfrac{(a+b+c)^2}{6}+\dfrac{(a+b+c)^3}{54}$. Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^3}{54}-\dfrac{t^2}{6}+\dfrac{t}{2}+3$. Ta có: $P\ge f(a+b+c)$.

Vì $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}=3$ do đó ta xét $f(t)=\dfrac{t^3}{54}-\dfrac{t^2}{6}+\dfrac{t}{2}+3$ với $t\ge 3$.

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t^2}{18}-\dfrac{t}{3}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{18}(t-3)^2\ge 0$. Do đó $f(t)$ là hàm số đồng biến và liên tục khi $t\ge 3$. Vì vậy $f(t)\ge f(3)=\dfrac{7}{2}$. Vậy: $P\ge f(a+b+c)\ge \dfrac{7}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của P là $\dfrac{7}{2}$ tại $a=b=c=1$.

Bài 12: Cho các số thực dương a,b,c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}-\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{a}+\frac{3}{b}+\frac{3}{c}}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\ge$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm:

$$\frac{a}{b^3+ab}+\frac{b}{c^3+bc}+\frac{c}{a^3+ca}\ge f\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

- Biến đổi cần tìm (Sử dụng Kỹ thuật Cauchy ngược dấu):

$$\frac{a}{b^3+ab}=\frac{1}{b}-\frac{b}{a+b^2}\ge \frac{1}{b}-\frac{b}{2b\sqrt{a}}=\frac{1}{b}-\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Bài giải

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu ta có: $\dfrac{a}{b^3+ab}=\dfrac{a+b^2-b^2}{b^3+ab}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a+b^2}$

Chú ý rằng: $a+b^2 \geq 2b\sqrt{a}$ do đó: $\dfrac{a}{b^3+ab}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{a+b^2}\geq \dfrac{1}{b}-\dfrac{b}{2b\sqrt{a}}=\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$.

Tương tự ta có: $\dfrac{a}{b^3+ab}+\dfrac{b}{c^3+bc}+\dfrac{c}{a^3+ca}\geq \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\right)$.

Sử dụng bất đẳng thức Hệ quả của bất đẳng thức AM – GM:

$$\left(x+y+z\right)^2 \leq 3\left(x^2+y^2+z^2\right) \Leftrightarrow x+y+z \leq \sqrt{3\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

Ta có: $\dfrac{1}{\sqrt{a}}+\dfrac{1}{\sqrt{b}}+\dfrac{1}{\sqrt{c}}\leq \sqrt{3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}$ cho nên: $\dfrac{a}{b^3+ab}+\dfrac{b}{c^3+bc}+\dfrac{c}{a^3+ca}\geq \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-\dfrac{1}{2}\sqrt{3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi: $a=b=c=1$. Do đó: $P\geq \left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-2\sqrt{3\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)}$

Xét hàm số: $f\left(t\right)=t-2\sqrt{3t}$ với $t>0$. Ta có: $P\geq f\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$.

Vì $f'\left(t\right)=1-\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{t}}=0 \Leftrightarrow t=3$. Do đó ta có bảng biến thiên:

t	0		3		$+\infty$
$f\left(t\right)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên, ta thấy $f\left(t\right)\geq -3$, $t\in\left(0;+\infty\right)$. Vậy $P\geq f\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\geq -3$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$. ***Kết luận:*** Giá trị nhỏ nhất của P là -3 tại $a=b=c=1$.

Bài 13: Cho các số thực dương a,b,c thỏa mãn $abc=1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}-\frac{\left(a+b+c\right)^2}{6}$$

Phân tích

- Biến cần đưa về: $a+b+c$.
- Chiều đánh giá cần có: $P\leq$.
- Chiều cần đánh giá cần tìm: $\dfrac{1+a}{1+b}+\dfrac{1+b}{1+c}+\dfrac{1+c}{1+a}\leq f\left(a+b+c\right)$

Bài giải

Sử dụng kỹ thuật Cauchy ngược dấu ta có: $\frac{1+a}{1+b}=1+a-\frac{b(1+a)}{1+b}, \frac{1+b}{1+c}=1+b-\frac{c(1+b)}{1+c}, \frac{1+c}{1+a}=1+c-\frac{a(1+c)}{1+a}$

Do đó: $\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}=3+a+b+c-\left(\frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\right)$

Theo bất đẳng thức AM – GM cho 3 số ta có: $\frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b(1+a)}{1+b}\frac{c(1+b)}{1+c}\frac{a(1+c)}{1+a}}$

$\Leftrightarrow \frac{b(1+a)}{1+b}+\frac{c(1+b)}{1+c}+\frac{a(1+c)}{1+a}\geq 3\sqrt[3]{abc}=3$ Vậy: $\frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}\leq 3+a+b+c-3$

$\Leftrightarrow \frac{1+a}{1+b}+\frac{1+b}{1+c}+\frac{1+c}{1+a}\leq a+b+c$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Vậy $P\leq a+b+c-\frac{(a+b+c)^2}{6}=-\frac{1}{6}(a+b+c-3)^2+\frac{3}{2}\leq\frac{3}{2}$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c=1$.

Kết luận: Giá trị lớn nhất của P là $\frac{3}{2}$ tại $a=b=c=1$.